ESCUELA DE EDUCACIÓN SUPERIOR PEDAGÓGICA PRIVADA "ITS INNOVA TEACHING SCHOOL"

PROGRAMA DE PROFESIONALIZACIÓN DOCENTE EN EDUCACIÓN PRIMARIA

MÉTODO DE PÓLYA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS EN ESTUDIANTES DE SEGUNDO GRADO DE PRIMARIA.

Trabajo de Investigación para optar al Grado Académico de Bachiller en Educación

KATHERINE FIORELLA HUAMÁN PORTILLA

EVA LISSETH OBANDO OCHOA

Lima – Perú
2022

Este trabajo se lo dedicamos a Dios y a nuestras familias, quienes han sido el soportenecesario para llegar a este punto de nuestrascarreras; que con su apoyo y aliento incondicional nos motivaron a seguir adelante y a cumplir nuestros objetivos en estos momentos difíciles de pandemia que nos tocó vivir.

Agradecemos a Innova Teaching School y a los docentes por su dedicación y calidad de enseñanza. También a nuestros padres quienes nos acompañaron desde el inicio hasta el final de nuestra formación.

Resumen

La presente monografía tiene como objetivo general describir las implicancias del método de Pólya para la resolución de problemas aditivos en estudiantes de segundo grado de primaria. Además, como objetivos específicos se plantea describir los tipos de enfoques de resolución de problemas aditivos en estudiantes de segundo grado de primaria; identificar las capacidades que deben desarrollar; describir los tipos de problemas aditivos PAEV e identificar las fases del método de Pólya en dicha población mencionada. Ante ello, el presente trabajo de investigación consta de cinco capítulos: En el primer capítulo se examina el enfoque de resolución de problemas donde se encuentran los tipos de enfoques e importancia; en el segundo, se abordan las capacidades matemáticas y las competencias de la asignatura en el nivel primaria; en el tercero, se estudian los problemas aditivos elementales verbales; en el cuarto capítulo se analiza el método Pólya, donde se identifican las fases del método y finalmente, en el quinto capítulo, se mencionan los beneficios del método en la resolución de problemas a través de investigaciones tanto nacionales como internacionales, en alumnos de primaria. En conclusión, se evidencia que el método de Pólya influye significativamente, mejorando la capacidad de resolución de problemas aditivos al ser aplicado en alumnos de segundo grado de primaria.

Palabras clave: Método de Pólya, problemas aditivos, resolución de problemas

Abstract

The general objective of this monograph is to describe the implications of Pólya's method for solving additive problems in second grade primary school students. In addition, as specific objectives, it is proposed to describe the types of additive problem-solving approaches in second grade primary school students; identify the capacities that must be developed; describe the types of PAEV additive problems and identify the phases of the Pólya method in said population mentioned. Given this, this research work consists of five chapters: The first chapter examines the problem solving approach where the types of approaches and importance are found; in the second, the mathematical capacities and competences of the subject at the primary level will be addressed; in the third, elementary verbal additive problems are studied; In the fourth chapter, the Pólya method is analyzed, where the phases of the method are identified and finally, in the fifth chapter, the benefits of the method in solving problems through both national and international research in primary school students are mentioned. In conclusion, it is evident that the Pólya method has a significant influence, improving the ability to solve additive problems when applied to second grade primary school students.

Keywords: Pólya method, additive problems, problema solving.

Tabla de Contenido

Índice de Anexos

Introducción

Actualmente, la educación primaria se encuentra en la búsqueda de nuevos modelos, ya que los tradicionales han presentado limitaciones y falencias en cuanto a las matemáticas. Por otro lado, por la coyuntura actual, los docentes de esta asignatura, se han tenido que adaptar a las nuevas tecnologías creadas para continuar con el aprendizaje, por ello, se han elaborado nuevas investigaciones en esta área, donde es fundamental que el maestro estudie permanentemente a sus alumnos, permitiendo así, cualificar su labor.

El Ministerio de Educación (MIEDU, s.f.) indica que: "La matemática es una actividad humana y ocupa un lugar relevante en el desarrollo del conocimiento, cultural y se encuentra en constante desarrollo, por ello sustenta una creciente variedad de investigaciones en las ciencias, la tecnologías modernas y otras" (p.134).

En Perú, como en muchos países más, se necesita que la formación matemática cada vez se fortalezca, en las nuevas generaciones. Esto debido a que, los procesos de enseñanza y aprendizaje cumplen un rol imprescindible, dado que, la obtención de contenido conceptual es básico; sin embargo, también se deben implementar las habilidades, destrezas y recursos mentales en los estudiantes para que logren hacer frente a las demandas de la sociedad presente y futura (Espinoza et al., 2008).

Pólya (1974) elaboró el Método de Resolución de Problemas, el cual ha influido en generaciones de matemáticos y no matemáticos. Aunque casi todos los profesores de matemáticas han conocido este método, sus ideas no se aplican regularmente en el aula. Por este motivo, en la presente monografía revisamos este método de enseñanza tan conocido y mostramos cómo se puede utilizar en las clases de matemáticas de habilidades básicas para aliviar los temores de los estudiantes hacia las matemáticas, y potencialmente cambiar sus conceptos erróneos comunes de la materia.

Los colegios se enfrentan a la desalentadora tarea de enseñar matemáticas de recuperación a estudiantes con un historial de problemas matemáticos lo cual es una situación compleja para los docentes de esta asignatura debido a que los mismos estudiantes que más necesitan aprender las matemáticas básicas son también los que tienen más dificultades para aprenderlas.

La presente investigación es sumamente relevante debido a sus implicancias teóricas, metodológicas y prácticas. Teóricamente, la investigación permitirá disponer de conocimientos sobre la particularidad de la aplicación del método de Pólya en el curso de matemática para que se pueda apreciar los resultados o la influencia que ha tenido este método. Metodológicamente, la presente investigación apela a un diseño cualitativo en el que se recopilan datos de carácter no numérico que permitirá identificar tendencias y premisas sobre el método de Pólya. Como implicancias prácticas de la investigación es que a través de estos lineamientos se podrá conocer la forma de aplicación de este método para que dé lugar a una enseñanza óptima.

Por este motivo, nace la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son las implicancias del método de Pólya para la resolución de problemas aditivos en estudiantes de segundo grado de primaria?

Además, el trabajo monográfico, como objetivo general, buscó describir las implicancias del método de Pólya para la resolución de problemas aditivos en estudiantes de segundo grado de primaria. Asimismo, los objetivos específicos de la investigación fueron: 1) Describir los tipos de enfoques de resolución de problemas aditivos en estudiantes de segundo grado de primaria; 2) Identificar las capacidades que deben desarrollar los estudiantes de segundo grado de primaria;

3) Describir los tipos de problemas aditivos PAEV en estudiantes de segundo grado de primaria y 4) Identificar las fases del método de Pólya en estudiantes de

segundo grado de primaria. 5) Describir los beneficios del método de Pólya en la resolución de problemas aditivos en diferentes investigaciones en estudiantes de segundo grado de primaria.

La estructura de la presente investigación está centrada en el desarrollo de cinco capítulos siendo el Capítulo I el que abordará el enfoque de resolución de problemas, el Capítulo II describirá las capacidades matemáticas, en el Capítulo III estudiaremos los problemas aditivos elementales verbales, en el Capítulo IV, el método de Pólya y finalmente, en el Capítulo V, se mencionarán los beneficios del método en diversas investigaciones respecto a la resolución de problemas aditivos, en estudiantes de segundo grado de primaria.

Capítulo I

Enfoque de Resolución de Problemas

Contexto

En el siglo XVI, la economía jugó un papel fundamental siendo el momento indicado para que las matemáticas fueran de mucha ayuda para la resolución de problemas de la aritmética (Madrid, et al., 2017). Por ello, en 1908, el matemático Poincaré (1994) describe a la saturación, incubación, inspiración y verificación como fases para la solución a nivel crítico y creativo, de los problemas. Por otro lado, Hadamard (1945) postula que: “Para describir el proceso mental matemático se debe aplicar la introspección mediante una serie de fases desde la documentación hasta la conclusión” (p. 12).

En Holanda, en la década de los 60, nace la Educación Matemática Realista (EMR) por Freudenthal, desafiando la psicología, la pedagogía y la educación del momento al tener un gran interés en la enseñanza y su experiencia adquirida en el aula. Esta estrategia demuestra que las matemáticas no son un conjunto de asignaturas sin relación entre sí, y la EMR expone la interrelación y el uso de los conceptos matemáticos. Además, sostiene que las matemáticas tienen valor educativo siempre que los alumnos comprendan, participen y evalúen las formas en que la asignatura organiza el mundo natural y social (Zolkower et al., 2006).

Una investigación a profundidad respecto a las matemáticas no se produjo hasta "el arte del descubrimiento". Fue Pólya (1979) quien creó una visión más desarrollada sobre la resolución de problemas, quien tenía la percepción de que era un arte de tipo práctico, como montar a caballo, patinar o tocar la trompa, que se aprende con la práctica. Pólya se apresuró a señalar que la resolución de problemas no era algo que se adquiría rápidamente, sino que había que aprenderlo a lo largo de un periodo de tiempo. Además, refiere que, este aprendizaje tenía que ser andamiaje para que el alumno fuera independiente. Asimismo, fue uno de los primeros en señalar que enseñar esta metodología iba a ser posible, por ende, ideó un plan para que otros tuvieran éxito con el proceso.

Por otro lado, Pólya se apresuró a señalar que los alumnos necesitan ayuda para que florezca en ellos la capacidad de resolución de problemas y que se debe enseñar eficazmente. Stanic y Kilpatrick (1989) utilizaron la analogía de la enseñanza con el arte quienes mencionaron que: “Nadie puede programar o mecanizar de otro modo la enseñanza; sigue siendo una actividad humana que requiere experiencia, gusto y juicio al igual que el arte" (p. 41). El arte de la enseñanza está en la habilidad del profesor, y de ahí surge el aprendizaje. Si el profesor no es bueno en el arte, el alumno nunca completará la obra maestra con ese profesor.

Además, Lester (1994) se ocupó también de la metacognición y evaluó el pensamiento de orden superior en matemáticas. Dado que la resolución de problemas se considera un segmento importante de las matemáticas, debe analizarse para poder desarrollar técnicas de instrucción influyentes. Investigó y descubrió que estas destrezas debían enseñarse de manera eficaz, por parte de profesores entrenados en el tema, a sus alumnos.

Schroeder y Lester (1989) manifestaron que: “El papel o función que tiene la resolución de problemas en los alumnos, es desarrollar el entendimiento de las matemática y justamente las habilidades brindadas son el enfoque más pertinente” (p. 42). Además, argumentaron que los defensores de este enfoque consideran que, la resolución de problemas es una posición pedagógica mas no un tema.

Este enfoque ha llegado a denominarse hoy en día como “Enseñanza a través de la Resolución de Problemas” (NCTM, 1991). Su investigación tiene una profunda influencia en el currículo matemático de las aulas actuales. La palabra clave de su investigación era enseñar a través de esta metodología matemática. Dar a los alumnos los problemas para que los resuelvan, en lugar de resolverlos al azar, ayudar a los educandos a tener e incrementar una mejor comprensión. Ha seguido dando forma a lo que es la resolución de problemas en el salón de clases y a lo que necesariamente deben realizar los maestros para influir positivamente en el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Características

Según el Ministerio de Educación (2015) la principal característica y fin de la resolución de problemas es: “Promover formas de enseñanza y aprendizaje a partir del planteamiento de problemas en diversos contextos. Además, este enfoque adquiere importancia debido a que promueve el desarrollo de aprendizajes “a través de”, “sobre” y “para” la resolución de problemas” (p. 10).

Este proceso compromete a que el alumno realice ejercicios para activar e incrementar su habilidad mental, aprenda a manipular los objetos matemáticos, desarrolle mayor creatividad, incremente su reflexión y perfeccione su proceso de pensamiento al practicar y ejecutar las distintas estrategias matemáticas. Además, la destreza para elaborar, formular y resolver problemas, hace posible la relación con las demás áreas curriculares incentivando, de esta manera, el desarrollo de otras habilidades. Finalmente, facilita e incrementa el vínculo de la asignatura de matemáticas, con experiencias e intereses propios de los educandos.

Tipos de enfoque

Con el objetivo de facilitar y desarrollar metodologías de enseñanza se elaboraron 3 tipos de enfoque de resolución de problemas, según Gaulin (2001). La primera es "A través de" la resolución de problemas, donde Gaulin (2001) hace referencia al entorno inmediato y circundante de los niños, el cual es un vehículo para favorecer el desarrollo del aprendizaje matemático, se orienta en un sentido constructivo e inventivo de la acción humana. Además, se encuentra "Sobre" la resolución de problemas, por lo cual Gaulin (2001) manifiesta que, esto hace explícito el desarrollo de la comprensión del conocimiento matemático, la planificación, la resolución de problemas estratégicos y la resolución de problemas metacognitivos, es decir, la movilidad de una variedad de recursos y competencias y habilidades matemáticas. Por último está "Para" la resolución de problemas, por lo cual Gaulin (2001) explica que incluyen la presentación periódica a los jóvenes de nuevas cuestiones y circunstancias. El proceso central de las matemáticas es la resolución de problemas, que es también el principal método para desarrollar vínculos funcionales entre las matemáticas y la realidad.

Importancia

Pólya (1981) manifiesta que: "El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el descubrimiento y triunfo" (p.7).

Con la práctica y desarrollo de esta metodología se busca que el educando logre encontrar la respuesta correcta de los problemas, después de atravesar una serie de procedimientos y sucesos, pero también la función es que utilice sus capacidades y saber previos, es decir, los conocimientos que la tiene sobre la asignatura, puesto que la resolución de problemas lo requerirá de esa manera.

Por otro lado, Iriarte (2011) manifiesta que: “Ha tomado fuerza en la investigación, por la importancia que tiene en el desarrollo de competencias para la vida, es así como en diferentes documentos tanto internacionales como nacionales, resaltan su valor y la necesidad del desarrollo de esta competencia” (p. 4).

Asimismo, es importante recalcar que, la resolución de problemas posee una función relevante en la generación de habilidades de interpretación que los educandos necesitan adecentar tanto en el ámbito educativo como para hacer frente a distintas problemáticas del futuro. A la par, Pérez y Ramírez (2011): "De acuerdo con Cuicas (1999), en Matemática la resolución de problemas juega un papel muy importante por sus innumerables aplicaciones tanto en la enseñanza como en la vida diaria" (p. 170).

Finalmente, también es relevante mencionar que las capacidades y destrezas que desarrollar los alumnos de primaria a la hora de aprender a resolver problemas, estas pueden ser ejecutadas no solo en el área educativa o dentro de clases, sino también en otras áreas. De esta manera, Pérez y Ramírez (2011): "En este sentido, puede decirse que la resolución de problemas ocupa un lugar central para su enseñanza pues estimula la capacidad de crear, inventar, razonar y analizar situaciones para luego resolverlas" (p.171).

Capítulo II

Competencias Matemáticas

Definición de Competencias

El MINEDU (s.f.) informa que, La educación primaria comprende seis grados y es el segundo nivel de la Educación Básica Regular (EBR). Además, su objetivo principal es que los alumnos adquieran competencias, que a su vez son promovidas desde la Educación Inicial. Asimismo, la atención a los alumnos de este nivel tiene en cuenta los estilos, ritmos y niveles de aprendizaje, así como la diversidad lingüística y cultural, favoreciendo las relaciones de cooperación y responsabilidad entre la familia y el centro educativo para asegurar el adecuado desarrollo de los alumnos y enriquecer su experiencia educativa.

Por su parte, Godino (2000) refiere: "La competencia se relaciona con la aptitud, capacidad, disposición de servir para una determinada situación. Una persona apta, o capaz, es conveniente para un determinado trabajo, servicio o función" (p.10). De lo anterior se deduce que las competencias están relacionadas con las habilidades que los individuos adquieren para superar los obstáculos del trabajo.

Además, Mira (1989) explica que: "La abstracción de conceptos matemáticos debe ser reflexiva, lo que se abstrae no es lo observable, sino que se descubren propiedades a partir de las acciones que se efectúan sobre los objetos, cuando manipula, clasifica, ordena, agrupa o realiza seriación" (p. 25), en consecuencia, enseñar a un joven a apropiarse de una definición matemática requiere una amplia acción heurística que reconozca al alumno como actor principal en el desarrollo y formación de su aprendizaje fundamental.

Competencia de resolución de problemas

Para el MINEDU (s.f.) "El logro del Perfil de egreso de los estudiantes de la Educación Básica se favorece por el desarrollo de diversas competencias" (p. 18). Además, mediante la resolución de problemas, la asignatura de matemáticas brinda y facilita que los alumnos desarrollen las competencias mencionadas a continuación:

- **Resuelve problemas de cantidad**

Implica que el alumno resuelva problemas o cree otros nuevos que necesiten que elabore y comprenda los conceptos de número, operaciones y propiedades. Asimismo, contextualizar estos aprendizajes y utilizarlos para representar o replicar los vínculos entre sus circunstancias y los datos. Además, incluye determinar si la respuesta buscada requiere una estimación o un cálculo preciso, y elegir metodologías, unidades de medida, procesos y otros recursos para este objetivo.

Esta competencia abarca las siguientes capacidades por parte de los estudiantes de segundo grado de primaria, que se mencionarán a continuación:

- **Traduce cantidades a expresiones numéricas:**

Se trata de convertir las conexiones entre los datos y las condiciones de un problema en una expresión numérica que reproduzca esas relaciones. Este enunciado es también un sistema compuesto por operaciones, números y sus atributos. Consiste en derivar cuestiones de una circunstancia o un enunciado numérico dado. También implica determinar si el resultado compilado o la expresión numérica suministrada se ajusta a las condiciones iniciales del problema.

- **Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones:**

Además de la lectura de sus representaciones e informaciones con contenido numérico, es la expresión del conocimiento de las ideas numéricas, las operaciones y sus atributos, las unidades de medida y las conexiones entre ellas utilizando el lenguaje numérico y numerosas representaciones.

- **Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo:**

Implica seleccionar, modificar, combinar o crear una serie de métodos y procesos, como el cálculo mental y escrito, la estimación, la aproximación y la medición, así como la comparación de cantidades y la utilización de diversos recursos.

- **Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones:**

Supone la elaboración de afirmaciones sobre las posibles relaciones entre los números naturales, racionales y enteros, sus operaciones y propiedades en relación con comparaciones y experiencias en las que las propiedades se derivan de casos particulares, así como su explicación por analogía, validación, justificación o refutación como ejemplos o contraejemplos.

Capítulo III

Problemas Aditivos Elementales Verbales

Problemas Aditivos Elementales Verbales

Según el MINEDU (2015): “Los problemas aritméticos elementales verbales (PAEV) nos muestran las diferentes situaciones de la realidad en las cuales se aprecia fenómenos que responden al campo aditivo (adición y sustracción) o al campo multiplicativo (multiplicación o división)” (p. 82).

Además, Martínez (1995) manifiesta que un PAEV viene a ser un problema aritmético, expresado o enunciado en un contexto de información gráfica o verbal.

Por otro lado, Puig y Cerdán (1988) mencionan que: “Un PAEV, es también un problema aritmético, el cual se expresa en un contexto de información verbal. Además, se pueden clasificar en dos tipos, simples y compuestos, atendiendo al número de datos que aparecen implícita y explícitamente en la información” (p.14).

Tipos de Problemas Aditivos del Segundo Grado de Primaria

Los problemas aditivos están comprendidos dentro de los PAEV, este tipo de problemas demandan un esfuerzo cognitivo y el propósito que tienen es el de encontrar una respuesta. Asimismo, estos problemas aditivos permitirán definir una cantidad a partir de otras proporcionadas en el problema (Minedu, 2015).

Están distribuidos en dos partes claramente identificables que son la parte informativa y la pregunta problemática, estos son los primeros problemas que desarrollan los niños en etapa académica, por ello, requieren de atención y esfuerzo constante por parte de los educadores (Minedu, 2015).

En la investigación de Sequeda et al. (2016), los procesos de solución aplicados por los niños están relacionados con la composición semántica del ejercicio propuesto; el aporte fundamental de Sequeda et al. (2016) reside en lograr el conocimiento de la estructura semántica como una variable más significativa que la sintaxis para determinar los procesos utilizados por los niños en la resolución de problemas aditivos y la existencia de cuatro tipos de problemas aditivos.

Dado que la suma y la resta son complementarias de forma invertida y la resta se considera una instancia especial de la suma, sintéticamente, entendemos que los problemas aditivos son aquellos que necesitan la aplicación de operaciones de suma y resta para su resolución. De acuerdo con Casajs (2005) y Sequeda et al. (2016), se describirán en detalle los siguientes tipos de problemas aditivos:

Problemas Aditivos de Cambio Transformación

Bermejo (1990) manifiesta que: "Los problemas aditivos se pueden caracterizar por la manifestación de una acción explícita o implícita, que varía una cantidad inicial, produciendo como resultado el aumento o disminución de aquella cantidad" (p. 2).

En este tipo de problemas se presentan situaciones diferentes sobre incremento o descenso en una cantidad ubicada en una secuencia temporal específica. Este tipo de problemas tiene tres estados específicos que son: el inicio, el proceso de cambio y la resolución final del ejercicio. La incógnita del problema se encuentra en uno de los tres estados (Bermenjo, 1990).

Algunos ejemplos de problemas aditivos de cambio o transformación para alumnos de 2º de primaria pueden ser:

- "Pedro tenía 7 soles, luego le dan 6 soles. ¿Cuántos soles tiene ahora?"

- “Karen tiene 9 manzanas, de las cuales se come 3 manzanas. ¿Cuántas manzanas le quedan?”
- “Pedro tenía 12 carritos, Lola le dio algunos carritos y ahora tiene 17 carritos. ¿Cuántos carritos le dio Lola?”

Asimismo, también se encuentran los problemas aditivos de cambio 1, 2, 3 y 4 que se explicarán gráficamente en el Anexo 1, 2, 3 y 4.

Problemas de Combinación o Composición

En estas situaciones, existen relaciones estáticas entre dos magnitudes distintas que pueden estudiarse por separado o en conjunto, sin ninguna forma de interacción (Bermenjo, 1990).

En este tipo de problemas están contempladas las combinaciones que pueden ocurrir entre dos partes y el total del problema que se forma al reunir estas, son problemas en los que se facilitan dos cantidades para la resolución. Además, se puede solicitar la consulta por el todo restante de la unión de las dos partes que componen el problema (Bermenjo, 1990).

Como ejemplos de problemas de cambio o transformación en estudiantes de 2º de primaria se pueden mencionar los siguientes:

- “Pedro tiene 10 camioncitos y José 8 trompos ¿Cuántos juguetes tienen entre los dos?”
- “En el salón de clases hay 15 alumnos y 10 son varones ¿Cuántas mujeres hay en el salón?”

Por otro lado, existen dos tipos de problemas de cambio que se mostrarán en el Anexo 5 y 6, para una mejor comprensión.

Problemas de comparación

En este tipo de problemas, existe una relación estática entre la cantidad de referencia, la cantidad comparada y la diferencia. Estas cuestiones requieren determinar la diferencia entre dos cantidades disjuntas o investigar una de las cantidades conociendo la otra y la diferencia entre ellas (Bermenjo, 1990).

En esta forma de problema se comparan dos valores y se determina la diferencia entre ellos; una de estas cantidades sirve de referente del ejercicio, mientras que la otra cantidad corresponde a la comparación; la diferencia radica en su establecimiento. La consulta en estas preguntas está determinada por el conocimiento de ambas cantidades, ya que se conoce el referente y la diferenciación de la cantidad comparada, así como la diferencia de la cantidad afectada y la cantidad comparada (Bermenjo, 1990).

Por otro lado, algunos ejemplos de problemas de comparación en educandos de 2º de primaria son:

- “César tiene 8 caramelos, Manolo tiene 13 chocolates. ¿Cuántos dulces tiene Manolo más que César?”
- “Néstor tiene 15 plátanos, Carlos tiene 9 naranjas. ¿Cuántas frutas tiene Carlos menos que Néstor?”

Asimismo, existen dos tipos de problemas de comparación para la población mencionada que se explicarán mediante el Anexo 7 y 8.

Problemas de Igualación

Respecto a los problemas de igualación, se puede mencionar que, es igual de importante que las anteriores tres. Consiste en una combinación de problemas de comparación y de cambio, ya que uno de los conjuntos debe sufrir una operación implícita (Bermenjo, 1990).

Estos problemas son los que reúnen problemas compuestas por dos cantidades distintas y que son modificadas las cuales se encuentras relacionadas de manera inversamente proporcional ya que se aumenta o disminuye hasta que se pueda encontrar la igualdad con la otra, de estas, una de ellas es la cantidad a igualar y la otra es la cantidad referente (Bermenjo, 1990).

Además, como ejemplos en alumnos de 2º se pueden mencionar
los siguientes:

- "Javier tiene 15 cuadernos, Walter tiene 11 cuadernos. ¿Cuántos libros es lo que debe encontrar Walter para tener muchos como Javier?"

Además, existen 2 tipos de problemas de igualación en estudiantes de 2º de primaria que se explican en el Anexo 9 y 10, para mayor entendimiento.

Capítulo IV

Método de Polya

Definición y Características

Según Suydam (1983): “Las primeras investigaciones sobre la resolución de problemas matemáticos se centraron principalmente en los problemas de palabras (libros de texto)” (p. 35). El énfasis principal estaba en cómo los niños resolvían los problemas. Al hacerlo, se pensaba que se podía encontrar una manera de enseñar a resolver problemas.

Fue durante este período que Pólya produce Cómo resolverlo (1954) "Una encantadora exposición de la introspección de la resolución de problemas" (Schoenfeld, 1987, p. 17). Todos los investigadores desde entonces han basado sus investigaciones sobre la resolución de problemas matemáticos en la obra de Polya.

Por su parte, Schoenfeld (1992) afirma que: "Las caracterizaciones de Pólya no proporcionaban la cantidad de detalles que permitieran a las personas que no estaban ya familiarizadas con las estrategias ser capaces de aplicarlas" (p. 53). También afirma que la razón de la falta de éxito se debe a que la heurística de Pólya es descriptiva más que prescriptiva.

Según Schoenfeld & Kilpatrick (2008) la investigación sobre la resolución de problemas debería apoyar a los estudiantes a desarrollar una mayor variedad de técnicas específicas para los problemas, a aprender estrategias metacognitivas y a mejorar sus ideas sobre la base de las matemáticas.

El método de Pólya se ha aplicado mucho para resolver problemas matemáticos en los niveles elemental, secundario y terciario. Este método guía a los educandos a realizar etapas y pasos en la resolución de problemas, y también a completar el resultado mirando hacia atrás.

Esta condición es en realidad casi igual a los principios generales de la gestión o la realización de una actividad, a saber, la elaboración de un plan, la organización de los aspectos correspondientes, la realización y el control de las actividades y el resultado obtenido. A continuación, se presentan las cuatro etapas que propone Pólya.

Fases del Método

Según las pautas didácticas propuestas por MINEDU (2015), estudiosos como Polya, Mason, Stacey, Burton y Shoenfeld han establecido los siguientes criterios de resolución de problemas.

Cabe recalcar que, en el anexo 11 y 12 se mostrarán dos ejemplos de sesiones que se pueden aplicar a estudiantes de segundo grado de primaria, donde se encuentran descritos claramente cada uno de las fases del método de Pólya.

Comprender el Problema

Es la primera fase y la más crucial, ya que es imposible abordar un problema si no se ha comprendido el enunciado. Por lo tanto, antes de ofrecer una solución, los alumnos deben comprender plenamente el enunciado del problema. Entre las preguntas y afirmaciones, pueden ser.

- “¿Sobre qué es el problema?”

- “¿Cómo lo entiendes con tus propias palabras?”

- “¿Cuáles son los datos? (lo que conoces).” “¿Cuál es la incógnita? (lo que buscas).”

- "¿Cuáles son las palabras que no conoces en el problema?"

- "Encuentra relación entre los datos y la incógnita."

- "Si puedes, realiza un organizar gráfico de lo leído."

En este primer paso, es crucial que el alumno determine si el tema incluye datos útiles para su solución o información innecesaria (MINEDU, 2015).

Pensar en un plan

En esta fase, el alumno utiliza sus conocimientos, su creatividad y su imaginación para construir o sugerir un plan que le permita identificar los procedimientos necesarios para resolver la cuestión. También es fundamental utilizar cuestiones con varias soluciones para encontrar la respuesta. Del mismo modo, el instructor puede ayudar al alumno formulando las siguientes preguntas:

- "¿Este problema se te hace similar a otros ya conocidos?"

- "¿Podrías formular el problema de otra manera?"

- "Imagínate un problema similar, pero más sencillo."

- "Supón que el problema ya se encuentra resuelto, ¿cómo se vincula la situación de llegada con la partida?"

- "¿Usar todos los datos cuando realizas el plan?"

En esta situación, es fundamental que el instructor explique a los alumnos cómo desarrollar los siguientes métodos, para que los utilicen en caso de ser necesario: a través de ensayo y error, resolviendo una cuestión muy similar y fácil al mismo tiempo, y creando diagramas o listas (MINEDU, 2015).

Aplicar el plan

En esta fase, el alumno implementa las estrategias que identificó para solucionar el problema, mediante un tiempo razonables para llevar a cabo el plan; por otro lado, si se realiza con éxito, se puede dejar de lado el problema y continuar con otro para volver a evaluarlo más adelante. El maestro puede sugerir las siguientes preguntas:

- "¿Es tu solución correcta?"
- "¿Puedes ser, de manera clara, que cada paso es el correcto?"
- "Antes de hacer algo, piensa: ¿qué consigo con esto?"
- "Acompaña cada operación matemática de una explicación contando lo que haces y para qué"
- "Cuando tropieces con una dificultad que te deja bloqueado, vuelve al principio, reordena las ideas y prueba de nuevo"

Si los alumnos siguen deliberada y cuidadosamente cada uno de los procedimientos o fases mencionados al abordar los retos, serán capaces de construir y ejecutar técnicas exitosas (MINEDU, 2015).

Comprobar el plan

Todo lo que hace el ser humano a veces se planifica, a veces no; lo mismo ocurre al aplicar un plan. Al resolver un problema hay que hacer un esfuerzo por revisar las respuestas obtenidas. La actividad podría realizarse utilizando la respuesta a través del método inverso, de manera que se pueda ver si la respuesta es realmente adecuada con la que se espera del problema, por ejemplo. En el caso del problema de la multiplicación, se puede hacer revisando los pasos de la división.

Polya (1979) afirma que es importante reexaminar y reconsiderar la forma en que resolvieron la pregunta y la respuesta. Esto les permite replantearse la pregunta y el método de resolución y, a veces, idear un método diferente y más fácil. Al hacerlo, los niños aprenden a creer en sí mismos. El profesor puede ampliar el problema para que el alumno vea cómo el método se adapta a otro problema o para que el alumno obtenga una comprensión más profunda.

Como preguntas, se sugieren las siguientes:

- "Fíjate en la solución. ¿Te parece que es válido?"

- "¿Puedes comprobar la solución?"

- "¿Puedes encontrar alguna otra solución?"

- "Acompaña la solución con una explicación que indique lo que has hallado"

- "Usa el resultado obtenido y el proceso para formular y formular nuevos problemas"

Estrategias Heurísticas

Al haber considerado en este trabajo monográfico, el método de Pólya como una estrategia válida para la pedagogía en las matemáticas, es importante precisar su significado, teniendo en cuenta la definición propia de Pólya (1974) quien refiere que: "El estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible. Pero si se le deja solo frente a su problema, sin ayuda alguna o casi sin ninguna, puede que no progrese. Por otra parte, si el maestro le ayuda demasiado, nada se le deja al alumno" (p. 25). Asimismo, el docente debe estar predispuesto a apoyar a los alumnos, pero no mucho ni demasiado poco.

Por otro lado, Castro y Quiñones (2008) manifiestan, respecto a las estrategias pedagógicas, que: "Son aquellas acciones que realiza el maestro para facilitar la formación y el aprendizaje de las disciplinas en los estudiantes. Para que no se reduzca a simples técnicas y recetas deben apoyarse en la formación teórica de los maestros" (p.

59), pues en la teoría se encuentra la creatividad necesaria para acompañar la complejidad del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Asimismo, cuando el profesor tiene una adecuada formación teórica, posee los recursos necesarios para llevar a cabo diferentes estrategias, todo ello sumando a la creatividad e imaginación, permitiendo que las actividades, propuestas y orientaciones sean significativas para los alumnos, lo cual contribuye en el mejoramiento de sus procesos de aprendizaje.

Por ello, el Minedu (2013) expone las siguientes estrategias heurísticas para la resolución de problemas, los cuales son ensayo y error, hacer una lista sistemática, empezar por el final, razonamiento lógico, particularizar, generalizar, buscar patrones, plantear una ecuación y resolver un problema semejante pero más simple (Anexo 13). Sin embargo, para utilidad de la monografía, se mencionarán las estrategias heurísticas que se pueden aplicar a estudiantes de segundo grado de primaria:

- **Realizar una simulación**

Como lo refieren Hernández y Villalba (2003), la simulación viene a ser una representación de un experimento utilizando algunos materiales como canicas, dados, papel, etc., o también ciertos programas electrónicos que son propicios para el caso. Cuyo objetivo sería correr diversas maneras de un experimento que en realidad sería muy complejo de realizar, aplicando múltiples materiales.

- **Hacer un diagrama**

Asimismo, Hernández y Villalba (2003) comentan que, con frecuencia, es útil aplicar un diagrama que represente la esencia del problema, aunque no sea necesario dibujar una imagen real que represente icónicamente el contexto. En otras palabras, la representación gráfica de un determinado problema hace posible su resolución, indicando una esquematización del mismo.

- **Ensayo y error**

Según el Minedu (2013) tantear viene a ser una estrategia muy útil al momento de realizar de manera ordenada y midiendo cada vez los ensayos que se ejecutan. Además, ciertas estrategias de solución, como la regulación o la aproximación sucesiva, se basan en la aplicación sistemática de muchas pruebas y sus correspondientes ajustes. Cada corrección debe generar una prueba que se acerque a la respuesta correcta.

Además, para Salazar (2000) es una herramienta importante para resolver algunos problemas de selección, en donde se proporcionan diversas alternativas de posibles soluciones y la persona o estudiante, debe probar cada una, hasta lograr encontrar la respuesta ideal.

- **Buscar patrones**

El MINEDU (2013) refiere que, de igual manera, para llegar a una solución para dificultades específicas, se requiere experimentar con una variedad de escenarios para establecer reglas que puedan ser usadas como guía.

Por otro lado, Salazar (2000) menciona que, lo primero se que debe realizar para la resolución de problemas es iniciar a jugar con el alumno, ejecutando pequeños casos y observando su comportamiento es posible encontrar un patrón que permita al docente hacer una conjetura. El maestro debe ver qué números tienen una cantidad impar de divisores y cuántos subconjuntos tienen un conjunto.

- **Utilizar analogías**

Para Salazar (2000) esta estrategia consiste en encontrar semejanzas en el archivo de la experiencia mediante casos similares, juegos, problemas, ya resueltos. Una de las preguntas que puede hacer el docente sería: “¿A qué nos recuerda?”. Asimismo, permite encontrar un adecuado punto de partida que proporciona confianza, analizar situaciones semejantes a la propuesta.

Capítulo V

Beneficios del Método de Pólya en Lla Resolución de Problemas Aditivos

Finalmente, habiendo descrito y explicado el tema, a continuación, se mencionarán las investigaciones referentes al método de Pólya y la capacidad de resolución de problemas, a nivel internacional y nacional, con el objetivo de describir los beneficios del método en los trabajos previos a esta monografía.

Zorrilla (2016) En su estudio sobre los efectos de la aplicación del método Pólya en el rendimiento académico matemático de 262 alumnos del sexto grado de primaria de la I.E. Los Libertadores de América, Manantay, Perú, encontró una mejora significativa en la prueba de salida debido a la aplicación del método Pólya, además de la mejora del rendimiento académico de los alumnos.

Por su parte, De La Cruz (2017) empleó el método de Pólya para desarrollar las capacidades matemáticas de los alumnos de la I.E. José Pardo y Barreda de Negritos en Talara – Perú, donde identificó como beneficios que, esta metodología logró desarrollar las capacidades matemática de los estudiantes de primaria, donde los alumnos aprendieron a diseñar un plan secuenciado para resolver los diferentes planteamientos. Este enfoque es significativo porque el alumno examina su respuesta, observa, reflexiona y establece conexiones entre los conceptos. En consecuencia, esta estrategia favorece considerablemente el desarrollo de las competencias matemáticas de los alumnos, generando anticipación e interés.

Además, Gómez y Jácome (2018) ejecutaron el método de Pólya en 45 estudiantes de un centro educativo de Ecuador, donde encontraron que, a través del método postest, reconocieron como beneficios que, los estudiantes evaluaron y compararon todo el procedimiento desarrollado por ellos, identificando los errores que tuvieron en la realización de una operación y planificaron hasta la sesión de revisión de sus resultados; Además, se descubrió que los promedios de los porcentajes de logro fueron superiores a los del grupo control.

También, Meses y Pealoza (2019) demostraron que el método Pólya resultó ser una herramienta relevante para la resolución de problemas en estudiantes de tercero y cuarto de primaria del Colegio Municipal Aeropuerto de Colombia, donde este método proporcionó a los estudiantes la adquisición de nuevas herramientas para interpretar problemas matemáticos, mejorar sus competencias y motivarlos a enfrentar nuevos retos sin el temor que genera el área de las matemáticas.

Kirichik y Agüero (2020) describieron los efectos al aplicar esta metodología en 30 alumnos de cuarto grado, dos escuelas de Paraguay donde, como beneficios encontraron que, fueron positivos, además de la mejora en el grado de razonamiento formal, la capacidad de desarrollar modelos mentales y la metacognición, destaca la mejora en las habilidades de resolución de problemas del grupo experimental.

Asimismo, Latour (2021) aplicó la estrategia de Pólya en estudiantes de 2º grado de primaria en una I.E. de Huancayo – Perú, donde halló, como beneficio, una mejora significativa en la capacidad de resolución de problemas en el área de matemática, activando en ellos procesos mentales como comprender el problema, configurar un plan, captar las relaciones que existen entre los datos y la incógnita a fin de encontrar un plan de solución, poner en ejecución el plan, verificar la solución obtenida, volver atrás, revisarla y discutirla.

Entonces, se puede mencionar que existen claros beneficios al aplicar el método de Pólya para la resolución de problemas aditivos en estudiantes de primaria en general, con el cual han podido mejorar sus capacidades y herramientas para la asignatura que muchos alumnos tratan de evitar.

Conclusiones

La asignatura de matemáticas viene a ser uno de los cursos menos aceptados por los alumnos de primaria, debido a la capacidad y herramientas que deben tener para responder correctamente a los problemas y ejercicios numéricos, esto ha causado muchas limitaciones y problemas en aquellos estudiantes; sin embargo, el método de Pólya se encuentra comprobado como una herramienta que facilita y trata de suplir estos problemas mencionados.

El método de Pólya es una herramienta heurística cuya implicancia se encuentra en el desarrollo y capacidad para la resolución de problemas aditivos en alumnos del nivel primaria, en especial, en los de segundo grado; puesto que, gracias a esta metodología, los estudiantes logran mejorar la relación que tienen con la asignatura de matemáticas, obteniendo herramientas para identificar, comprender, resolver los problemas de una manera didáctica y fácil, lo cual repercute en sus calificaciones haciendo que la motivación, pasión e interés por la matemáticas aumente cada vez más.

Basándose en las descripciones mencionadas, se sugiere que los profesores de matemáticas adopten este método de enseñanza, centrándose en los alumnos, de modo que el proceso de resolución de problemas utilice el proceso de cuatro pasos de resolución de problemas: entender el problema, idear un plan, realizar el plan y mirar hacia atrás, dado que, como se identificó en la monografía a nivel conceptual y estadístico por las investigaciones citadas, las consecuencias serán positivas en los alumnos de primaria.

Referencias Bibliográficas

Bermenjo, V. (1990). *El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas.* Paidos. https://fama.us.es/discovery/fulldisplay?vid=34CBUA_US:VU1&tab=LibrariesSearch&d ocid=alma991001350599704987&lang=es&context=L

Casajús, A. (2005). *Resolución de problemas aritmético-verbales por alumnos con déficit de atención con hiperactividad TDAH* [Tesis de pregrado, Universidad de Barcelona] Repositorio de la Universidad de Barcelona. https://www.tdx.cat/handle/10803/1311#page=1

Castro, M. y Quiñones, C. (2008). *Estrategias pedagógicas y didácticas para docentes de educación preescolar que ayuden a la detección e intervención del TDAH en niños y niñas en el aula escolar* [Tesis de pregrado, Universidad de San Buenaventura]. Repositorio de la Universidad de San Buenaventura. http://biblioteca.usbbog.edu.co:8080/Biblioteca/BDigital/43221.pdf

De La Cruz, D. (2017). *Aplicación del método de George Polya para desarrollar las capacidades matemáticas de los y las estudiantes del segundo año "C" de la I.E. José Pardo y Barreda de Negritos - Talara, 2016* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. Repositorio de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo. https://repositorio.unprg.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12893/1668/BC-TES-TMP-521.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Espinoza, J., Espinoza, J., Gonzáles, M., Zumbado, M. y Ramírez, C. (2008). *La resolución de problemas en la Enseñanza de las Matemáticas: una experiencia con la función exponencial, polígonos y estadística* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Heredia]. Repositorio de la Universidad Nacional Heredia.

Godino, J. (2000). Competencias y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen? *Revista didáctica de las* *matemáticas*, 1-15. https://www.researchgate.net/publication/282325609_Competencia_y_comprension_matematica_Que_son_y_como_se_consiguen

Hadamard, J. (1945*). An essay y on the psychology of invention in the mathematical field.* Editorial Princeton University Press.

Hernández, V. y Villalba, M. (2003). *Diversas estrategias heurísticas para la solución de problemas.* https://mydokument.com/diversas-estrategias-heuristicas-para-la-solucion-de- problemas-una-muestra-de.html

Iriarte, A. (2011). Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo. *Zona Próxima, 15*(4), 2-21. https://www.montes.upm.es/sfs/E.T.S.I.%20Montes/Sub.%20Calidad/Recursos%20Com petencias/Archivos/2011_Iriarte.PDF

Kirichik, R. y Agüero, Y. (2020). Estudio de la incidencia de la aplicación del método de Polya para resolver problemas de aritmética en estudiantes del cuarto grado - EEB de dos escuelas del sector oficial, periodo 2017. *Revista de Ingeniería, Ciencias y Sociedad, 2*. https://revista.facet-unc.edu.py/facet_ojs/index.php/RICS/article/view/15

Latour, R. (2021). *Estrategia Polya y capacidad de resolución de problemas matemáticos en estudiantes del segundo grado Chupaca* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional del Centro del Perú]. Repositorio de la Universidad Nacional del Centro del Perú. https://repositorio.uncp.edu.pe/handle/20 500.12894/7553

Lester, F. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 660-675. https://www.jstor.org/stable/749578

Madrid, M., Maz, A., León, C. y López, E. (2017). Aplicaciones de las matemáticas a la vida diaria en los libros de aritmética españoles del siglo XVI. *Bolema, 31*(59), 1082-1100. https://www.scielo.br/j/bolema/a/VTLN8qvsFbQYKnVJnPF45bJ/?format=pdf&lang=es

Mamani, N. (2019). *Resolución de problemas aditivos en el área de matemática, en los estudiantes de primero y segundo grado de educación primaria de la Institución Educativa Primaria Nº 72385 de Alto Challapa - Huancané, 2017* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional San Agustín de Arequipa]. Repositorio de la Universidad Nacional San Agustín de Arequipa. http://repositorio.unsa.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12773/14086/EDmachn.pdf?seque nce=1&isAllowed=y

Martínez, M. (1995). Importancia de los PAEV de una etapa: algunas indicaciones para su tratamiento en el aula. *Revista de Ciencias de la Educación,* (12), 169-184. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=261743

Ministerio de Educación. (2013). *Rutas de aprendizaje: ¿Qué y cómo aprenden nuestros adolescentes?, Fascículo 1 VII ciclo.* Corporación Gráfica Navarrete S.A. http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/3739

Ministerio de Educación. (2015). *Hacer uso de saberes matemáticos para afrontar desafíos diversos.* Ministerio de Educación. http://www.minedu.gob.pe/n/xtras/fasciculo_general_matematica.pdf

Ministerio de Educación. (s.f). *Educación básica regular.* Ministerio de Educación. http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-nivel-primaria-ebr.pdf

Mira, R. (1989). *Matemática "viva" en el parvulario.* CEAC. https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=20381

NCTM. (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* S.A.E.M.

Pérez, Y. y Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación, 35*(73), 169-194. https://www.redalyc.org/pdf/3761/376140388008.pdf

Poincaré, H. (1944). *Ciencia y método.* Espasa Calpe.

Pólya, G. (1974). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Trillas. https://cienciaymatematicas.files.wordpress.com/2012/09/como-resolver.pdf

Pólya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas. https://cienciaymatematicas.files.wordpress.com/2012/09/como-resolver.pdf

Pólya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas.* https://es.scribd.com/doc/218324353/g- Polya-Como-Plantear-y-Resolver-Problemas-Bookfi-

Puig, L. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Síntesis. https://www.uv.es/puigl/acapulco90.pdf

Schoenfeld, A. (1987). Confessions of an accidental theorist. *Learning of Mathematics*, 30-38. Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334-370.

Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Toward a Theory of Proficiency in Teaching Mathematics. *International Handbook of Mathematics Teacher Education, 2*, 1-35. https://www.scirp.org/(S(351jmbntvnsjt1aadkposzje))/reference/ReferencesPapers.aspx? ReferenceID=1500401

Schroeder, T. & Lester, F. (1989). *Developing understanding in mathematics via problem solving.* NCTM.

https://www.bgsu.edu/content/dam/BGSU/COSMOS/Documents/resources/C2AM2P-resources/Developing-Understanding-Mathematics-Problem-Solving-Schroeder-Lester-1989.pdf

Sequeda, J., González, S. y Galeano, S. (2016). *Estrategia pedagógica para mejorar el aspecto semántico en los niños y niñas de cinco y seis años del grado transición en el colegio Tomás Cipriano de Mosquera, IED* [Tesis de pregrado, Universidad Libre de Colombia]. Repositorio de la Universidad Libre de Colombia. https://repository.unilibre.edu.co/bitstream/handle/10901/9576/Tesis%20Sandra%20Gale ano%20cambios%20ok-2.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Suydam, M. (1983). Achieving with calculators. *Arithmetic teacher, 31*(3). https://www.jstor.org/stable/i40053490

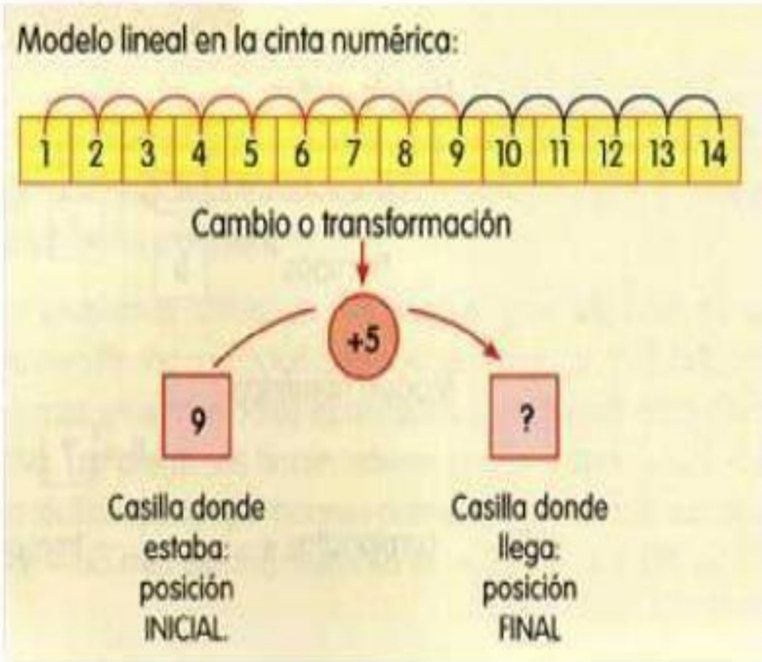
Zolkower, B; Bressan, A. y Gallego, M. (2004). *I Parte: la educación matemática realista. Principios en que se sustenta.* http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf

Zorrilla, W. (2016). *El método de Polya en el rendimiento académico en el área de matemática en los estudiantes del sexto grado de la institución educativa los libertadores de américa del distrito de Manantay -2016* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía]. Repositorio de la Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía. http://repositorio.unia.edu.pe/handle/unia/156

Anexos

Anexo 1. Problema aditivo de cambio 1

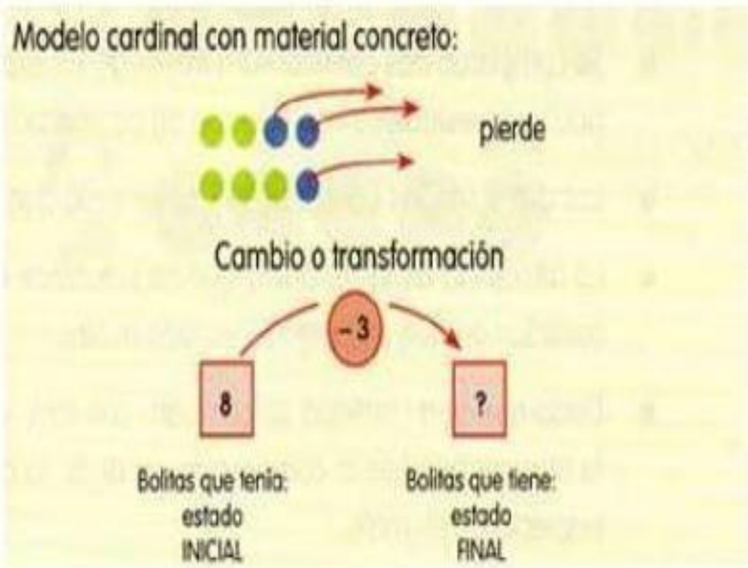
Cambio 1 (CA1) Se hace crecer la cantidad inicial y se pregunta por la cantidad final, que es de la misma naturaleza. Es un problema en el que se usa la adición.	Marisol juega en el camino numérico. Ella está en la casilla 9. Si lanza el dado y sale 5, ¿hasta qué casilla avanzará?



Nota: Extraído de Mamani (2019)

Anexo 2. Problema aditivo de cambio 2

Cambio 2 (CA2) Se hace disminuir la cantidad inicial y se pregunta por la cantidad final, que es de la misma naturaleza. Es un problema en el que se usa la sustracción.	Nicolás tiene 8 bolitas. Si juega una partida con Micaela y pierde 3, ¿cuántas bolitas tendrá?



Nota: Extraído de Mamani (2019)

Anexo 3. Problema aditivo de cambio 3

<table>
<tr>
<td>Cambio 3 (CA3)

Se conoce la cantidad inicial y la cantidad final, que es mayor que la cantidad inicial; luego, se pregunta por el aumento, que es el cambio o la transformación de la cantidad inicial.

Es un problema en el que se usa la sustracción.</td>
<td>Nicolás jugó en el camino numérico con Marisol. Él estaba en la casilla 7; después de haber lanzado el dado, puso su ficha en la casilla 11. ¿Qué ocurrió: avanzó o retrocedió?, ¿cuántas casillas?


</td>
</tr>
</table>

*Nota: Extraído de Mamani (2019)*21

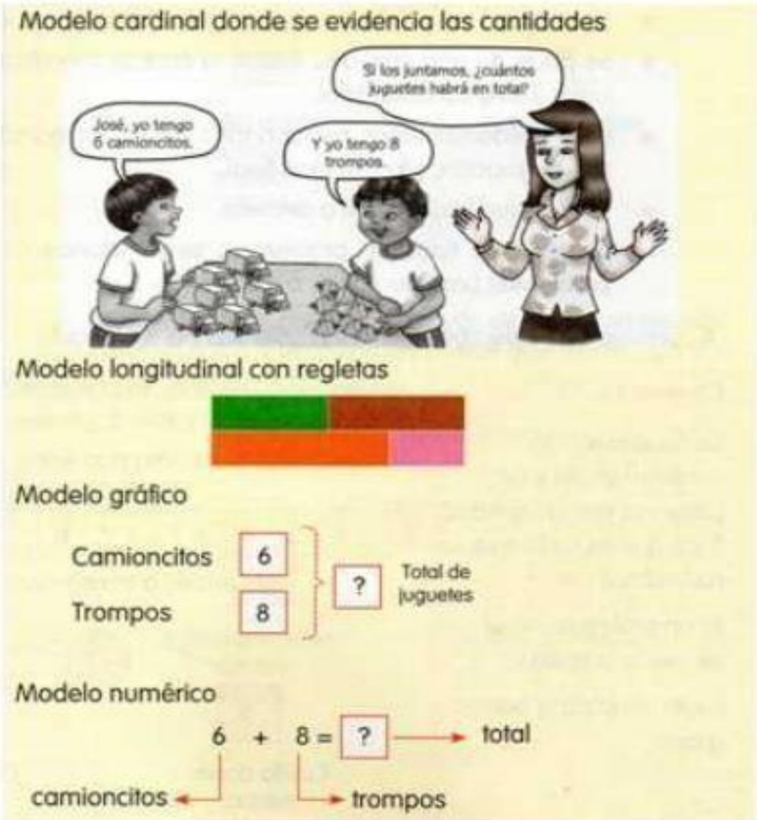
Anexo 4. Problema aditivo de cambio 4

Cambio 4 (CA4) Se conoce la cantidad inicial y la cantidad final, que es menor que la cantidad inicial; luego, se pregunta por la disminución, que es el cambio o la transformación de la cantidad inicial. Es un problema en el que se usa la sustracción.	Micaela tenía 16 bolitas, y después de jugar con Nicolás tiene 12. ¿Qué ocurrió con las bolitas que tenía?, ¿ganó o perdió bolitas?, ¿cuántas?

Nota: Extraído

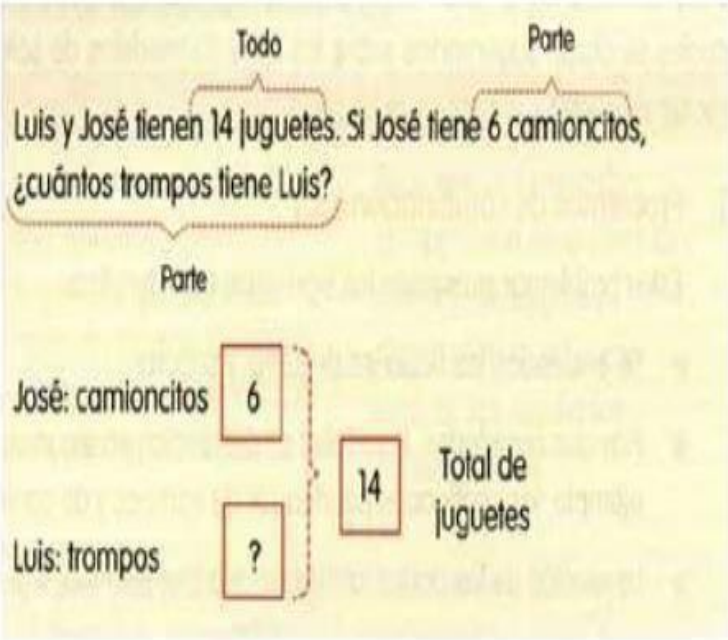
de Mamani (2019)

Anexo 5. Problema de combinación 1

Combinación 1 (CO1) Se conocen las dos partes y se pregunta por el todo. Es un problema en el que se usa la adición.	Luis tiene 6 camioncitos y José 8 trompos. ¿Cuántos juguetes tienen los dos juntos? 

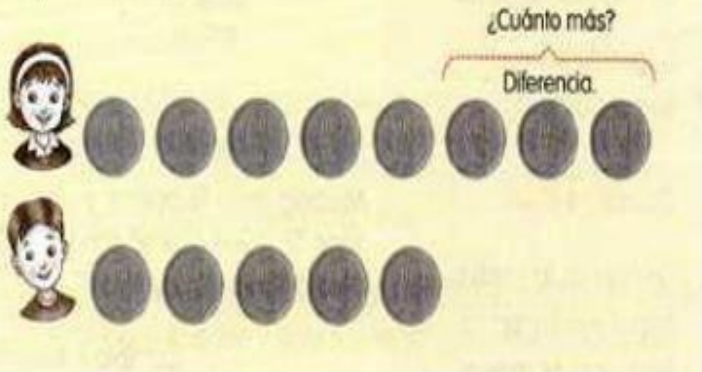
Nota: Extraído de Mamani (2019)

Anexo 6. Problema de combinación 2

Combinación 2 (CO2) Es inverso al problema anterior. Se conoce el todo y una de sus partes; luego, se pregunta por la otra parte. Es un problema en el que se usa la sustracción.	Luis y José tienen 14 juguetes. Si José tiene 6 camioncitos, ¿cuántos trompos tiene Luis? 

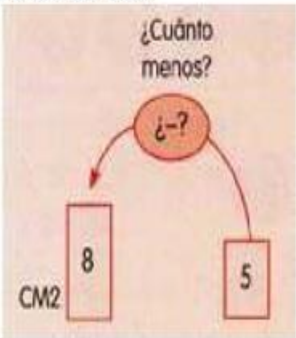
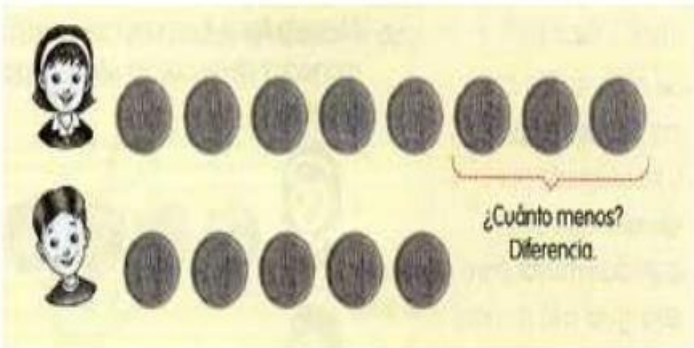
Nota: Extraído de Mamani (2019)

Anexo 7. Problema de comparación 1

Comparación 1 (CM1) Se conocen las dos cantidades y se pregunta por la diferencia "de más" que tiene la cantidad mayor respecto a la menor. Es un problema en el que se usa la sustracción.  	Dos formas de presentar un mismo problema: - Micaela tiene 8 monedas y Nicolás tiene 5. ¿Cuántas monedas tiene Micaela más que Nicolás? - Micaela tiene 8 monedas y Nicolás tiene 5. ¿Cuántas monedas más tiene Micaela que Nicolás? Este problema puede conducir al error, ya que los niños asocian "más que" a "sumar". 

Nota: Extraído de Mamani (2019)

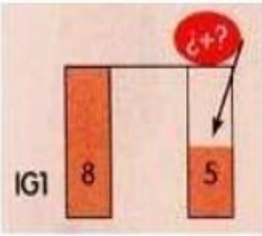
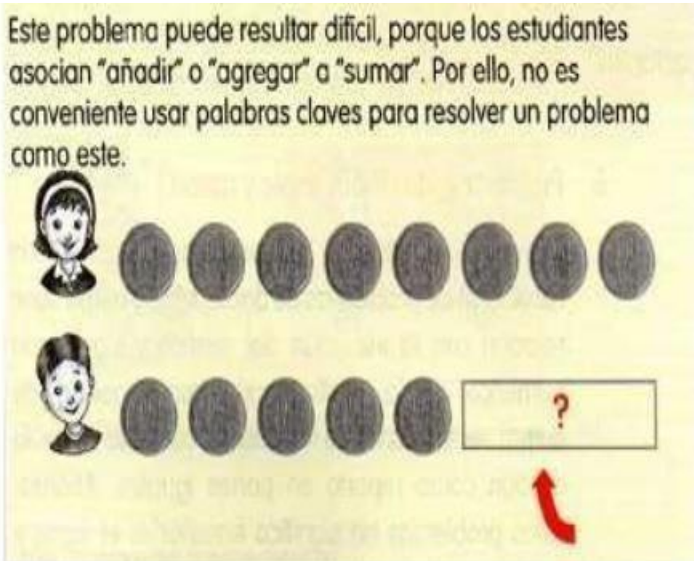
Anexo 8. Problema de comparación 2

Comparación 2 (CM2) Se conocen las dos cantidades y se pregunta por la diferencia "de menos" que tiene la cantidad menor con respecto a la mayor. Es un problema en el que se usa la sustracción. 	Dos formas de presentar un mismo problema: - Micaela tiene 8 monedas y Nicolás tiene 5. ¿Cuántas monedas tiene Nicolás menos que Micaela? - Micaela tiene 8 monedas y Nicolás tiene 5. ¿Cuántas monedas menos tiene Nicolás que Micaela? 

Nota: Extraído de Mamani (2019)

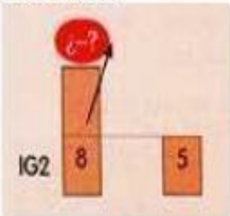
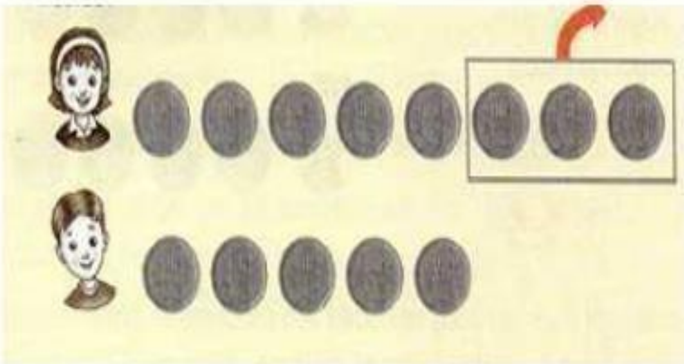
Anexo 9. Problema de igualación 1

<table>
<tr>
<td>Igualación 1 (IG1)

Se conocen las dos cantidades a igualar y se pregunta por el aumento de la cantidad menor para que sea igual a la mayor.</td>
<td>Micaela tiene 8 monedas y Nicolás tiene 5. ¿Cuántas monedas le deben dar a Nicolás para que tenga igual cantidad que Micaela?</td>
</tr>
<tr>
<td>Es un problema en el que se usa la sustracción.

</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Nota: Extraído de Mamani (2019)

Anexo 10. Problema de igualación 2

Igualación 2 (IG2) Se conocen las dos cantidades a igualar y se pregunta por la disminución de la cantidad mayor para que sea igual a la menor. Es un problema en el que se usa la sustracción. 	Micaela tiene 8 monedas y Nicolás tiene 5. ¿Cuántas monedas debe perder Micaela para tener las mismas que Nicolás? 

Nota: Extraído de Mamani (2019)

Anexo 11. Ejemplo 1 de las fases del Método de Pólya

DESCRIPCIÓN DE LA SESIÓN
-Martes 5 de diciembre del año 2017, son las 8:30 am. Los estudiantes llegaron temprano y me sentí feliz para empezar un día más en el aula. Nos saludamos cordialmente con cada uno de ellos. -Empezamos la sesión de clase cantando una canción "el elefante" -Para recoger los saberes previos de los estudiantes sobre el reconocimiento del todo y las partes de una colección de objetos. Presenté, en un papelote la muestra de un grupo de objetos como piedritas y chapitas (cantidad total). Luego, pedí a un estudiante que encierre en un círculo las piedritas y que los cuente (cantidad parcial); y a otro que cuente las chapitas (cantidad parcial). Después, pregunté: ¿cuántos son piedritas y cuántos son chapitas? A lo cual los niños respondieron con facilidad. -Comuniqué el propósito de la sesión: hoy aprenderemos a representar problemas que implican separar objetos o animales. -Acordé con los estudiantes las normas de convivencia que les permitirán trabajar en un clima favorable. -Dialogamos con los niños sobre situaciones cotidianas en las que tienen que resolver problemas y cuán útil es su aprendizaje para encontrar soluciones. Para luego, presentar la siguiente situación: *Franco y Jhon tienen 15 juguetes. Si Franco tiene 7 carritos. ¿Cuántos trompos tiene Jhon?* 1. **Comprender el problema**. Para orientar en la comprensión del problema, hice preguntas: ¿de qué trata el problema?, ¿cuántos juguetes tienen Franco y Jhon?, ¿cuántos son carritos? y ¿qué nos piden averiguar? 2. **Concebir un plan o diseñar una estrategia**. Para promover la búsqueda de estrategias. Orienté a través de interrogantes: ¿cómo resolverán el problema?, ¿qué harán primero?; ¿cómo llegarán a la respuesta?, ¿qué materiales utilizarán?, ¿será útil hacer un dibujo? -Con el material que tenían como piedritas y chapitas simularon el problema. 3. **Llevar a cabo el plan o ejecutar la estrategia**. Luego, les dije que representen cada uno de los datos del problema: ¿cuántos juguetes son en total?, y ¿cuántos son carritos? Resolvieron esta situación problemática utilizando la estrategia metodológica de Polya con el material que tenían como piedritas y chapitas. -Una vez que todos han llegado a la respuesta, solicité que dibujen su representación, luego que hagan un esquema y resuelvan con una operación. Por ejemplo: 15 – 7 = -Formalizamos los aprendizajes junto con los estudiantes: para resolver estos problemas podemos: separar una de las cantidades, se puede realizar esquemas, o también, realizar una operación. 4. **Reflexionar sobre el proceso seguido o revisar el plan**. Finalmente, reflexionamos con los niños acerca de los procedimientos desarrollados.

Nota: Extraído de Mamani (2019)

Anexo 12. Ejemplo 2 de las fases del Método de Pólya

DESCRIPCIÓN DE LA SESIÓN

El día jueves 14 de diciembre del año 2017, siendo horas 8:30 am iniciamos la sesión de aprendizaje con una actividad motivadora.

Primero recojo los saberes previos de los estudiantes sobre la última clase en donde aumentaron o quitaron a una cantidad inicial.

Luego, les comunico el propósito de la sesión: hoy aprenderemos a resolver problemas donde averiguaremos la cantidad que aumenta o se le quita a la cantidad inicial de una cantidad.

Y revisamos con los estudiantes las normas de convivencia que les permitirán trabajar en un clima afectivo favorable: respetar a sus compañeros, ser tolerantes, participar en orden, etc.

En seguida se planteó la siguiente situación: *Al aula de segundo grado le llevaron los desayunos escolares para los alumnos: un pan y su vaso con leche para cada uno. La maestra comenzó a repartir los panes y se dio cuenta que solo tenia 18 panes, por lo que no le iban a alcanzar para todos sus alumnos, así que le trajeron algunos panes más. Si al contar nuevamente había 24 panes. ¿Cuántos panes le trajeron a la maestra? Antes de repartir, contó 29 vasos con leche, pero solo necesitaba 24; así que devolvió algunos vasos. ¿Cuántos vasos con leche devolvió la maestra?*

1. **Comprender el problema**. Les pedí que lean el problema; luego, realicé las preguntas: ¿cuántos alumnos tendrá el aula de segundo grado?, ¿por qué sabes que son 24 alumnos?; ¿qué le tocaba a cada alumno?; ¿en el caso de los panes, faltaban o sobraban?; ¿en el caso de los vasos con leche, faltaban o sobraban?

2. **Concebir un plan o diseñar una estrategia**. Propicié situaciones para que elaboren sus propias estrategias, preguntándoles: ¿cómo lo vamos a realizar?, ¿podremos dibujar la situación? Entregando a cada uno un papelote, plumones, goma y las imágenes; para que representen ambas situaciones en el papelote con ayuda de las imágenes. Después de haber hecho el esquema, respondieron preguntas como: ¿Cómo puedo obtener la respuesta en el primer caso?, ¿y en el segundo?, ¿qué operación tendré que realizar?, ¿cuál es la cantidad inicial?, ¿cuál es la cantidad final?, ¿la cantidad disminuye o aumenta en la primera parte?, ¿por qué?; ¿y en la segunda parte, aumenta o disminuye?, ¿por qué?

3. **Llevar a cabo el plan o ejecutar la estrategia**. Los estudiantes resolvieron esta situación problemática, tomando en cuenta lo siguiente: Para resolver estos problemas tenemos que conocer dos cantidades: cantidad inicial y cantidad final. Y debemos efectuar una resta: a) cuando comparamos una cantidad final mayor que la inicial: para saber cuánto falta a la cantidad inicial para alcanzar a la cantidad final; b) cuando tenemos una cantidad inicial mayor y queremos obtener una cantidad final menor: para saber en cuánto debemos disminuir la cantidad inicial.

4. **Reflexionar sobre el proceso seguido o revisar el plan**. Una vez encontrada la solución reflexionaron sobre los procesos seguidos y los resultados obtenidos: ¿cómo lograron hallar la respuesta?; ¿qué los llevó a elegir la estrategia?; ¿por qué el camino que eligieron los condujo a la solución?; ¿pueden proponer otras formas de resolver el problema?

Nota: Extraído de Mamani (2019)

Anexo 13. Estrategias heurísticas

Estrategias heurísticas
1. Ensayo-error Tantear es una estrategia muy útil cuando se realiza de forma organizada y evaluando cada vez los ensayos que se hacen. En realidad, algunos métodos específicos de solución, como el de regulación o el de aproximaciones sucesivas, se basan en el uso sistemático de numerosos ensayos y sus respectivas correcciones. La idea es que cada rectificación conduzca a un ensayo que se acerque más a la respuesta.
2. Hacer una lista sistemática En los casos en que requiere la enumeración de objetos matemáticos, es conveniente realizar un conteo o listado organizado, con el fin de no dejar de lado ninguna posibilidad. Esta estrategia es muy útil al buscar soluciones en una ecuación, para encontrar espacios muestrales o resolver problemas de permutaciones o combinaciones.
3. Empezar por el final La estrategia de utilizar el pensamiento regresivo se utiliza mayormente en problemas en los cuales tenemos información de una situación final; también para demostrar desigualdades. La combinación de métodos progresivos y regresivos es una potencia técnica para demostrar teoremas.
4. Razonar lógicamente El razonamiento lógico es muy importante al resolver problemas, pues gracias a él podemos engarzar los pasos y comprender las secuencias y cadenas de razonamiento que se producen en el desarrollo de su solución.
5. Particularizar Conviene siempre utilizar casos particulares para familiarizarse con el problema. Así, es posible observar algún método que guíe hacia la solución de un problema genérico.
6. Generalizar En algunos problemas puede ser muy útil simbolizar las expresiones o averiguar si lo que se pide se refiere a un caso particular de alguna propiedad general. A esto se le conoce como la paradoja del inventor. A veces es conveniente investigar más de lo que piden.
7. Buscar patrones En algunos problemas es necesario experimentar con varios casos con el fin de encontrar pautas o regularidades que después se podrían emplear para llegar a la solución.
8. Plantear una ecuación Lo primordial para poder aplicarla con éxito es el entrenamiento en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.
9. Resolver un problema semejante pero más simple Algunas veces, utilizar un método que nos dio resultado con un problema más simple y relacionado con el que tenemos nos conduce a la solución del problema.

Nota: Extraído del Ministerio de Educación (2013)